Lógica Numérica

APRESENTAÇÃO

Lógica e matemática estão diretamente relacionadas. As probabilidades, os problemas de contagem e as progressões geométricas utilizam fundamentos lógicos para a sua fixação. Mas e as sequências de números? Será que é possível continuar uma sequência numérica simplesmente utilizando o raciocínio lógico?

Nesta Unidade de Aprendizagem, você vai conhecer os conceitos de sequências e séries, a fim de aprimorar o raciocínio e utilizar essas ferramentas para obter teoremas matemáticos.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Definir os conceitos de sequência e série.
- Comprovar teoremas através de fórmulas tabeladas de séries.
- Usar a lógica numérica como um conjunto de regras para obter o próximo termo da sequência.

INFOGRÁFICO

A lógica numérica é a lógica que trata das sequências e séries. Acompanhe no infográfico!

CONTEÚDO DO LIVRO

Quando os elementos de um conjunto infinito podem ser listados, o conjunto é chamado de contável. Acompanhe um trecho da obra "Matemática discreta e suas aplicações", pois ela trata sobre os conjuntos contáveis e incontáveis. Inicie seus estudos no tópico Sequências e somatórios.

Boa leitura!

The McGraw-Hill Companies

Matemática Discreta e Suas Aplicações
Sexta edição
ISBN: 978-85-7726-036-2

Av. Brigadeiro Faria Lima, 201, 17º andar.
São Paulo – SP – CEP 05426-100

Prol. Paseo de la Reforma 1015 Torre A
Piso 17, Col. Desarrollo Santa Fé,
Delegación Alvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F

Tradução da sexta edição em inglês de *Discrete Mathematics and Its Applications*.
Publicada pela McGraw-Hill, uma unidade de negócios da McGraw-Hill Companies, Inc., 1221 Avenue of the Americas, New York, NY 10020.
©2007 by Kenneth H. Rosen
ISBN da obra original: 978-0-07-288008-3

Coordenadora Editorial: *Guacira Simonelli*
Editora de Desenvolvimento: *Marileide Gomes*
Produção Editorial: *RevisArt*
Supervisora de Pré-impressão: *Natália Toshiyuki*
Preparação de Texto: *Patrícia Travanca/Marise Goulart*
Design de Capa: *Rebidas Design & Associates*
Imagem de Capa: Cover art ©Jasper Johns (b. 1930)/Autorizado por VAGA, New York, NY. *Dancers on a Plane*.
Diagramação: Crontec Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Rosen, Kenneth H.
Matemática discreta e suas aplicações [recurso eletrônico] / Kenneth H. Rosen ; tradução técnica: Helena Castro, João Guilherme Giudice. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2010.

Editado também como livro impresso em 2009.
ISBN 978-85-63308-39-9

1. Matemática. I. Título.

CDU 501

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB-10/Prov-009/10

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

Introdução

Seqüências são listas ordenadas de elementos. As seqüências são usadas em matemática discreta de várias maneiras. Elas podem ser usadas para representar soluções de certos problemas de contagem, como veremos no Capítulo 7. Elas são também uma estrutura de dados importante em ciência da computação. Esta seção contém uma revisão da notação usada para representar seqüências e somas de termos das seqüências.

Quando os elementos de um conjunto infinito podem ser listados, o conjunto é chamado de contável. Discutiremos nesta seção sobre os conjuntos contáveis e incontáveis. Demonstraremos que o conjunto dos números racionais é contável, mas o conjunto dos números reais não o é.

Seqüências

Uma seqüência é uma estrutura discreta usada para representar uma lista ordenada. Por exemplo, 1, 2, 3, 5, 8 é uma seqüência com cinco termos e 1, 3, 9, 27, 81 , . . . , 30, . . . é uma seqüência infinita.

DEFINIÇÃO 1 Uma *seqüência* é uma função de um subconjunto do conjunto dos números inteiros (geralmente ou do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ou do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$) para um conjunto S. Usamos a notação a_n para indicar a imagem do número inteiro n. Chamamos a_n de *termo* da seqüência.

Usamos a notação $\{a_n\}$ para descrever a seqüência. (Note que a_n representa um único termo da seqüência $\{a_n\}$. Note também que a notação $\{a_n\}$ para a seqüência é a mesma para a notação de um conjunto. Entretanto, o contexto no qual usamos essa notação sempre deixará claro quando estamos trabalhando com conjuntos ou com seqüências. Note que, apesar de termos usado a letra a na notação para uma seqüência, outras letras ou expressões podem ser usadas, dependendo da seqüência que considerarmos. Ou seja, a escolha da letra a é arbitrária.)

Descrevemos as seqüências pela listagem de termos da seqüência em ordem crescente de subscritos.

EXEMPLO 1 Considere a seqüência $\{a_n\}$, em que

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

A lista de termos dessa seqüência, começando por a_1, ou seja,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

começa com

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

DEFINIÇÃO 2 Uma *progressão geométrica* é uma seqüência na forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

em que o *termo inicial a* e a *razão r* são números reais.

Lembre-se: Uma progressão geométrica é um análogo discreto de uma função exponencial $f(x) = ar^x$.

EXEMPLO 2 As seqüências $\{b_n\}$, com $b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$, com $c_n = 2 \cdot 5^n$ e $\{d_n\}$, com $d_n = 6 \cdot (1/3)^n$ são progressões geométricas com termo inicial e razão comum igual a 1 e -1; 2 e 5; e 6 e 1/3, respectivamente, se começarmos com $n = 0$. A lista de termos $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ começa com

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots;$$

a lista de termos $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ começa com

$$2, 10, 50, 250, 1250, \ldots;$$

e a lista de termos $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ começa com

$$6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$$

◀

DEFINIÇÃO 3 Uma *progressão aritmética* é uma seqüência da forma

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + nd, \ldots$$

em que o *termo inicial a* e a *diferença (ou razão) d* são números reais.

Lembre-se: Uma progressão aritmética é um análogo discreto da função linear $f(x) = dx + a$.

EXEMPLO 3 As seqüências $\{s_n\}$, com $s_n = -1 + 4n$ e $\{t_n\}$, com $t_n = 7 - 3n$ são progressões aritméticas com termos iniciais e diferenças comuns iguais a -1 e 4 e 7 e -3, respectivamente, se começarmos em $n = 0$. A lista de termos $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ começa com

$$-1, 3, 7, 11, \ldots,$$

e a lista de termos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ começa com

$$7, 4, 1, -2, \ldots.$$

◀

As seqüências na forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são geralmente usadas em ciência da computação. Essas seqüências finitas são também chamadas de **cadeias.** Esta cadeia é também indicada por $a_1a_2 \ldots a_n$. (Lembre-se que cadeias de bits, que são seqüências finitas de bits, foram introduzidas na Seção 1.1.) A **extensão** da cadeia S é o número de termos nessa cadeia. A **cadeia vazia,** indicada por λ, é a cadeia que não tem termos. A cadeia vazia tem extensão zero.

EXEMPLO 4 A cadeia *abcd* é uma cadeia de extensão quatro. ◀

Seqüências de Números Inteiros Especiais

Um problema comum em matemática discreta é encontrar uma fórmula ou uma regra para construir termos de uma seqüência. Às vezes, apenas poucos termos de uma seqüência que resolvem um problema são conhecidos; o objetivo é também identificar a seqüência. Mesmo que os termos iniciais de uma seqüência não determinem a seqüência inteira (afinal, há infinitas seqüências que começam com o mesmo conjunto finito de termos iniciais), conhecer os primeiros termos pode ajudar você a montar uma conjectura sobre sua seqüência. Uma vez feita essa conjectura, você pode tentar verificar se montou uma seqüência correta.

Ao tentar deduzir uma fórmula possível ou regra para os termos de uma seqüência a partir dos termos iniciais, tente encontrar um padrão desses termos. Você pode também ver se é possível determinar como um termo pode ser produzido a partir de seu antecedente. Há muitas questões que você poderia fazer, mas algumas das mais úteis são:

- Existem séries com o mesmo valor? Ou seja, o mesmo valor ocorre várias vezes em uma fila?
- Existem termos obtidos a partir de termos antecedentes pela adição do mesmo valor ou de algum valor que depende da posição na seqüência?
- Existem termos obtidos a partir de termos antecedentes pela multiplicação de um determinado valor?

- Existem termos obtidos pela combinação, de certa maneira, de termos antecedentes?
- Existem ciclos entre os termos?

EXEMPLO 5 Encontre as fórmulas para as seqüências com os seguintes termos: (a) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 (b) 1, 3, 5, 7, 9 (c) 1, −1, 1, −1, 1.

Solução: (a) Identificamos os denominadores de potência 2. A seqüência com $a_n = 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ é uma possibilidade. Essa seqüência proposta é uma progressão geométrica com $a = 1$ e $r = 1/2$.

(b) Notamos que cada termo é obtido pela adição de 2 ao termo anterior. A seqüência com $a_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ é uma possibilidade. Essa seqüência proposta é uma progressão aritmética com $a = 1$ e $d = 2$.

(c) Os termos alternam-se entre 1 e −1. A seqüência com $a_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ é uma possibilidade. Essa seqüência proposta é uma progressão geométrica com $a = 1$ e $r = -1$. ◀

Os exemplos 6 e 7 mostram como podemos analisar seqüências para descobrir como os termos são construídos.

EXEMPLO 6 Como podemos construir os termos de uma seqüência se os primeiros 10 termos são 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

Solução: Note que o número inteiro 1 aparece uma vez, o número inteiro 2 aparece duas vezes, o número inteiro 3 aparece três vezes e o número inteiro 4 aparece quatro vezes. Um regra razoável para a construção dessa seqüência é que o número inteiro n aparece exatamente n vezes, então os próximos cinco termos da seqüência seriam 5, os seguintes seis termos seriam 6, e assim por diante. A seqüência construída dessa maneira é uma possibilidade. ◀

EXEMPLO 7 Como podemos construir os termos de uma seqüência se os primeiros 10 termos são 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59?

Solução: Note que cada um dos 10 primeiros termos dessa seqüência a partir do primeiro é obtido pela adição de 6 ao termo subseqüente. (Podemos ver isto conferindo que a diferença entre dois termos consecutivos é 6.) Conseqüentemente, o n-ésimo termo poderia ser construído começando com 5 e adicionando 6 a ele um total de $n - 1$ vezes; ou seja, é possível que o n-ésimo termo seja $5 + 6(n - 1) = 6n - 1$. (Essa é uma progressão aritmética com $a = 5$ e $d = 6$.) ◀

Outra técnica útil para encontrar uma regra para a construção de termos de uma seqüência é comparar os termos de uma seqüência de interesse com os termos de uma seqüência de números inteiros conhecida, ou seja, os termos de uma progressão aritmética, termos de uma progressão geométrica, quadrados perfeitos, cubos perfeitos e assim por diante. Os 10 primeiros termos de algumas seqüências que você deve querer guardar estão dispostos na Tabela 1.

EXEMPLO 8 Conjecture uma fórmula simples para a_n, se os 10 primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$ são 1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

Solução: Para resolver este problema, começamos olhando para a diferença entre dois termos consecutivos, mas não vemos um padrão. Quando formamos uma razão de termos consecutivos para vermos se cada termo é um múltiplo do termo anterior, encontramos que essa razão, embora não uma constante, se aproxima de 3. Então, é razoável suspeitar que os termos dessa seqüência são construídos com uma fórmula que envolve 3^n. Comparando esses termos com os termos correspondentes da seqüência $\{3^n\}$, percebemos que o n-ésimo termo é 2 menos a potência de 3 correspondente. Vemos que $a_n = 3^n - 2$ para $1 \leq n \leq 10$ e conjeturamos que esta fórmula é mantida para todo n. ◀

TABELA 1 **Algumas Seqüências Usuais.**	
n-ésimo termo	***Primeiros 10 termos***
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

Veremos ao longo deste texto que as seqüências de números inteiros aparecem em uma grande variedade de contextos em matemática discreta. As seqüências que temos ou que serão encontradas incluem a seqüência de números primos (Capítulo 3), o número de maneiras de ordenar n objetos discretos (Capítulo 5), o número de movimentos necessários para resolver o famoso quebra-cabeça da Torre de Hanói com n discos (Capítulo 7) e o número de coelhos em uma ilha depois de n meses (Capítulo 7).

As seqüências de números inteiros aparecem em uma grande variedade de áreas além da matemática discreta, incluindo biologia, engenharia, química e física, assim como em quebra-cabeças. Uma grande base de dados com mais de 100 000 seqüências de números inteiros diferentes pode ser encontrada na *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Esta base de dados foi criada por Neil Sloane na década de 1960. A última versão impressa dessa base foi publicada em 1995 ([SIPI95]); a enciclopédia atual ocuparia mais de 150 volumes do tamanho da edição de 1995. Novas seqüências foram adicionadas regularmente a essa base de dados. Há também um programa acessível via Internet que você pode usar para encontrar seqüências a partir da enciclopédia que coincidem com os termos iniciais que você possui.

Somatórios

Agora, introduziremos a **notação de somatória.** Começamos por descrever a notação usada para expressar a soma dos termos

$$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$$

da seqüência $\{a_n\}$. Usamos a notação

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{1\leq j\leq n} a_j$$

para representar

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Aqui, a variável j é chamada de **índice da somatória,** e a escolha da letra j como variável é arbitrária; ou seja, poderíamos usar qualquer outra letra, como i ou k. Ou, na notação,

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Aqui, o índice da somatória assume todos os números inteiros, começando com seu **menor limite** m e terminando com seu **maior limite** n. A letra maiúscula grega sigma, Σ, é usada para indicar somatória.

As leis usuais da aritmética são aplicadas à somatória. Por exemplo, quando a e b são números reais, temos $\sum_{j=1}^{n}(ax_j + by_j) = a\sum_{y=1}^{n}x_j + b\sum_{j=1}^{n}y_j$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais. (Não apresentamos uma demonstração formal desta identidade aqui. Tal demonstração pode ser construída usando a indução matemática, um método de demonstração que introduziremos no Capítulo 4. A demonstração também usa as propriedades comutativas e associativas para adição e a propriedade distributiva de multiplicação sobre adição.)

Daremos alguns exemplos de notação de somatória.

EXEMPLO 9 Expresse a soma dos primeiros 100 termos da seqüência $\{a_n\}$, em que $a_n = 1/n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Exemplos Extras

Solução: O menor limite para o índice da somatória é 1 e o maior limite é 100. Escrevemos a soma como

$$\sum_{j=1}^{100}\frac{1}{j}.$$

◀

EXEMPLO 10 Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5} j^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25\\ &= 55.\end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 11 Qual o valor de $\sum_{k=4}^{8}(-1)^k$?

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{8}(-1)^k &= (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8\\ &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

◀

Links

NEIL SLOANE (Nascido em 1939) Neil Sloane estudou matemática e engenharia elétrica na Universidade de Melbourne, com uma bolsa de estudos da companhia de telefone do governo australiano. Ele teve muitos trabalhos relacionados com telefonia, como construção de postes telefônicos, em seus trabalhos de férias. Depois de se graduar, ele foi designado para cuidar das redes de transmissão de telefone de custo mínimo na Austrália. Em 1962, foi para os Estados Unidos e estudou engenharia elétrica na Cornell University. Sua tese de Ph.D. foi sobre o que chamamos agora de redes neurais.

Ele conseguiu um emprego nos Laboratórios Bell em 1969, trabalhando em muitas áreas, incluindo criação de rede de transmissão e teoria de codificação. Atualmente trabalha para os Laboratórios AT&T, saindo dos Laboratórios Bell quando a AT&T se separou destes em 1996. Um dos seus problemas favoritos é o **kissing problem,** ou **problema do beijo** (nome que ele cunhou), que pergunta quantas esferas podem ser organizadas em n dimensões para que todas elas toquem uma esfera central de mesmo tamanho. (Em duas dimensões, a resposta é 6, pois 6 moedas podem ser colocadas de modo que elas toquem uma moeda central. Em três dimensões, 12 bolas de bilhar podem ser colocadas para que elas toquem uma bola de bilhar central. Duas bolas de bilhar que se tocam dão um "beijo", o que dá sentido à terminologia "kissing problem" e "kissing number", ou "números de beijos".) Sloane, junto com Andrew Odlyzko, mostrou que em 8 e 24 dimensões os números de beijos otimizados são, respectivamente, 240 e 196.560. Os kissing number são conhecidos nas dimensões 1, 2, 3, 8 e 24, mas não em outras dimensões. Os livros de Sloane incluem *Sphere Packings, Lattices and Groups,* 3. ed., com John Conway; *The Theory of Error-Correcting Codes*, com Jessie MacWilliams; *The Encyclopedia of Integer Sequences*, com Simon Plouffe; e *The Rock-Climbing Guide to New Jersey Crags*, com Paul Nick. Este último livro demonstra seu interesse em escalar montanhas rochosas, incluindo mais de 50 sites sobre escalada em New Jersey.

Às vezes é útil modificar o índice da somatória em uma soma. Isso geralmente é feito quando dois somatórios devem ser adicionados, mas seus índices da somatória não combinam. Ao avaliar um índice de soma, é importante fazer as mudanças apropriadas no somatório correspondente. Isso será ilustrado pelo Exemplo 12.

EXEMPLO 12 Suponha que tenhamos a soma

$$\sum_{j=1}^{5} j^2$$

mas queremos o índice da somatória entre 0 e 4 em vez de 1 a 5. Para fazer isso, consideremos $k = j - 1$. Então, o novo índice de soma vai de 0 a 4 e o termo j^2 é dado por $(k + 1)^2$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2.$$

É fácil verificar que ambas as somas são $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$. ◀

Somas de termos de progressões geométricas são normalmente crescentes (tais somas são chamadas de **séries geométricas**). O Teorema 1 nos dá uma fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica.

TEOREMA 1 Se a e r são números reais e $r \neq 0$, então

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & se\ r \neq 1 \\ (n+1)a & se\ r = 1. \end{cases}$$

Demonstração: Considere

$$S = \sum_{j=0}^{n} ar^j.$$

Para calcular S, primeiro multiplicamos os dois lados da equação por r e então manipulamos a soma resultante da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
rS &= r\sum_{j=0}^{n} ar^j && \text{substituindo a fórmula da somatória por } S \\
&= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} && \text{pela propriedade distributiva} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k && \text{alterando o índice da somatória, com } k = j + 1 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} ar^k\right) + (ar^{n+1} - a) && \text{removendo o termo } k = n + 1 \text{ e adicionando o termo } k = 0 \\
&= S + (ar^{n+1} - a) && \text{substituindo } S \text{ pela fórmula da somatória}
\end{aligned}$$

A partir dessas equações, vemos que

$$rS = S + (ar^{n+1} - a).$$

Isolando S, mostramos que se $r \neq 1$, então

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Se $r = 1$, então a soma certamente é igual a $(n + 1)a$. ◁

EXEMPLO 13 Somatórias duplas aparecem em muitos contextos (como na análise de laços agrupados em programas de computador). Um exemplo de somatória dupla é

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij.$$

Para avaliar a dupla soma, primeiro expanda a somatória interna e então continue computando a somatória externa:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij &= \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i)\\ &= \sum_{i=1}^{4}6i\\ &= 6 + 12 + 18 + 24 = 60.\end{aligned}$$

◀

Podemos também usar a notação de somatória para adicionar todos os valores de uma função, ou termos de um conjunto indexado, em que o índice da somatória é compatível com todos os valores do conjunto. Ou seja, escrevemos

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

para representar a soma dos valores de $f(s)$, para todos os membros s de S.

EXEMPLO 14 Qual o valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$?

Solução: Como $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$ representa a soma de valores de s para todos os membros do conjunto $\{0, 2, 4\}$, temos que

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6.$$

◀

Certas somas aparecem repetidamente em matemática discreta. Ter um grupo de fórmulas para tais somas pode ser útil; a Tabela 2 fornece uma pequena relação das fórmulas para as somas mais freqüentes.

Demonstramos a primeira fórmula dessa tabela no Teorema 1. As próximas três fórmulas nos dão a soma dos primeiros n números inteiros positivos, a soma de seus quadrados e a soma de seus cubos. Essas três fórmulas podem ser obtidas de muitas maneiras diferentes (por exemplo, veja os exercícios 21 e 22 no final desta seção). Note também que cada uma dessas fórmulas, uma vez conhecidas, pode ser facilmente demonstrada usando a indução matemática, assunto da Seção 4.1. As últimas duas fórmulas da Tabela envolvem séries infinitas e serão discutidas brevemente.

O Exemplo 15 mostra como as fórmulas da Tabela 2 podem ser úteis.

TABELA 2 Algumas Fórmulas Para Somatórios Usuais.

Soma	*Fórmula Fechada*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \vert x \vert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty}, kx^{k-1}, \vert x \vert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

EXEMPLO 15 Encontre $\sum_{k=50}^{100} k^2$.

Solução: Primeiro note que como $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{49} k^2 + \sum_{k=50}^{100} k^2$, temos que

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2.$$

Usando a fórmula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ da Tabela 2, vemos que

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 338350 - 40425 = 297925.$$

◀

ALGUMAS SÉRIES INFINITAS Embora a maioria dos somatórios neste livro seja finita, as séries infinitas são importantes em algumas partes da matemática discreta. As séries infinitas são geralmente estudadas em um curso de cálculo e mesmo a definição dessas séries requer o uso de cálculo, mas algumas vezes elas aparecem em matemática discreta, pois esta trata de coleções infinitas de elementos discretos. Em particular, em nossos estudos futuros de matemática discreta, encontraremos fórmulas fechadas para as séries infinitas nos exemplos 16 e 17 que serão bastante usuais.

EXEMPLO 16 (*Requer cálculo*) Considere x como um número real com $|x| < 1$. Encontre $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Solução: Pelo Teorema 1, com $a = 1$ e $r = x$, vemos que $\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$. Como $|x| < 1$, x^{k+1} tende a 0 quando k tende ao infinito. Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \to \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}.$$

◀

Podemos produzir novas fórmulas de somatória a partir de fórmulas conhecidas por diferenciação ou integração.

DICA DO PROFESSOR

O vídeo desta unidade demonstra o que são sequência e série, trazendo também uma conversa descontraída para mostrar como se trabalha com ambos. Assista!

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

EXERCÍCIOS

1) Observando a figura, podemos inferir que a sétima imagem terá quantas barras?

A) 108.

B) 109.

C) 110.

D) 107.

E) 106.

2) **Completando a sequência a seguir, qual será o centésimo termo?**
1-2-4-8...
Depois de descobrir, considere os cinco primeiros algarismos, iguale a zero os demais e coloque em notação científica.

A) 1,2675E30.

B) 6,3382E29.

C) 8,7589E29.

D) 8,7589E30.

E) 9,6E30.

3) **Três amigos foram a um restaurante. A conta resultou em R$ 30,00. No final, o dono do restaurante deu um desconto de R$ 5,00. O garçom larápio ficou com R$ 2,00. Assim, cada amigo recebeu R$ 1,00 de troco.**
Agora, fazendo as contas! Cada amigo pagou R$ 9,00, resultando em R$ 27,00. Somando os R$ 2,00 do garçom, temos R$ 29,00. Mas não era R$ 30,00? Onde está o R$ 1,00?

A) Essa questão de lógica não tem resposta.

B) O R$ 1,00 ficou com o dono do restaurante.

C) Estamos equalizando o problema de maneira equivocada, fazendo o R$ 1,00 faltar para R$ 30,00. Porém, o que temos é um gasto atual de R$ 27,00, a conta é de R$ 25,00 + R$ 2,00 que ficaram com o garçom.

D) Estamos equalizando o problema de maneira correta. A situação é que cada um pagou R$ 9,00. Porém, o resultado de R$ 27,00 não é correto, pois precisamos considerar os valores anteriores.

E) É óbvio que o garçom ficou, na verdade, com R$ 3,00. É a única maneira de a matemática ser coerente, ou é uma falha e precisamos reestudar a lógica matemática.

4) Descreva como comprovar que a progressão geométrica, ao ter uma razão menor do que 1, converge para a série geométrica.

A) Isso é impossível, não acontece.

B) Na verdade, é a progressão aritmética que é usada para comprovar.

C) Temos que pegar a progressão geométrica e simplesmente somar até o infinito.

D) Para relacionar a série geométrica com a progressão geométrica, precisamos usar a soma dos termos dentro de um intervalo da progressão geométrica, separar o numerador, deixando um termo por divisão, e pensar no caso extremo de infinito. Assim, um dos termos desaparece e resulta na série geométrica.

E) A progressão geométrica já é a série geométrica.

5) Gauss, o "príncipe da matemática", ainda criança realizou uma façanha incrível, descobrindo um método para achar a soma de todos os termos de uma sequência.

Faça o mesmo. Encontre o resultado da soma da sequência:
S={1,4,7,10,...301}

A) 15251.

B) 15100.

C) 15402.

D) 15432.

E) 16908.

NA PRÁTICA

Os somatórios podem ser utilizados na conversão de bases (binário, decimal, octal e hexadecimal), principalmente se tratamos de números grandes. Você deve se perguntar: onde isso é utilizado? Bem, em eletrônica digital usamos tal conhecimento para fazer decodificadores, já que a eletrônica digital usa o sistema binário. Mas você pode pensar: computadores não utilizam sistema digital? Pois bem, essa é uma verdadeira utilidade, cálculos em computadores.

CÓDIGO ASCII

1	☺	6	♠
2	☻	7	•
3	♥	8	◘
4	♦	9	○
5	♣	10	◙

Por exemplo, da base binária, o número: 01110110 é transformado para a base decimal usando somatório, que é a lógica numérica na prática. Veja a transformação!

$$\sum_{n=0}^{7} a_i.2^n = 0.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 2 + 4 + 16 + 32 + 64 = 118$$

Repare que o somatório vai até um número inferior à quantidade de algarismos do número binário. Isso acontece porque temos que considerar o número zero.

SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Séries Geométricas: Exercícios Resolvidos 1.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Sequência 01: Sequência numérica / sequência lógica

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!